

問. $x^4 + x^2 + 1$ の因数分解

と) あえす $x^2 = a$ としてみると、

$$a^2 + a + 1$$

残念ながら、これ以上進まず。

x が偶数乗で置き換えてもうまく
いかないときは、強制的に $(\quad)^2$
の形になるようなイメージをもう。

ということ。

「 $x^4 + 2x^2 + 1$ 」の形であれば $(\quad)^2$
となりそうだね。

じゃ、つくってみよう。

ただし、元の形になるような調整が必要。

$$x^4 + \underbrace{2x^2 - x^2}_{+x^2} + 1$$

$$= \underbrace{x^4 + 2x^2 + 1} - x^2$$

この部分だけ $x^2 = a$ とすると

$$= \underbrace{a^2 + 2a + 1} - x^2$$

$$= \underbrace{(a+1)^2} - x^2$$

a とおくと。

$$= a^2 - x^2$$

$$= (a+x)(a-x)$$

$a \in \text{元}$ に戻して.

$$= \{(a+1)+x\} \{(a+1)-x\}$$

$$= (a+1+x)(a+1-x)$$

$a \in \text{元}$ に戻して.

$$= (x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

$$= (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

↑ ↑
ともにこれ以上は△り.

よって.

$$x^4 + x^2 + 1$$

$$= \underline{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} //$$

問. $(x^2 - 10x + 24)(x^2 + 12x + 35) - 48$
の因数分解

なぜか()が始めからついているので、これを展開してしまうのはやめましょう。かといって、置き換えることもできない。でも()のそれぞれは因数分解できそうなので、やってみよう。

$$(x-4)(x-6)(x+5)(x+7) - 48$$

これらの組み合わせを変えて、置き換え作業をできるようにできれば...

$$(x-4)(x-6)(x+5)(x+7) - 48$$

このようにすると、 x の係数がともに「+1」となる!

$$= (x-4)(x+5)(x-6)(x+7) - 48$$

それぞれを展開して

$$= (x^2 + x - 20)(x^2 + x - 42) - 48$$

置き換えられるのができたので

$$x^2 + x = a \text{ として}$$

$$(a-20)(a-42) - 48$$

これが残ってしまっているの？

展開して

$$a^2 - 62a + 840 - 48 \\ = a^2 - 62a + 792$$

和が負、積が正なので、因数分解すると

$$(a - \bigcirc)(a - \triangle) \text{ の形となる}$$

ということで、かけて 792、足して 62 になる数を探そう。

すぐには見つかりそうもないので

792 を素因数分解して、積の組み合わせを考えよう。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 792} \\ 2 \overline{) 396} \\ 2 \overline{) 198} \\ 3 \overline{) 99} \\ 3 \overline{) 33} \\ 11 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$$

偶数の 2 が複数あるので

足して 62 になる組み合わせは

ともに偶数

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11}{\underbrace{\hspace{10em}}_{36} \times \underbrace{\hspace{2em}}_{22}}$$

58 × 62 にたすたす

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11}{\underbrace{\hspace{10em}}_{18} \times \underbrace{\hspace{2em}}_{44}}$$

62 < たすたす!

よって、18 と 44 の組み合わせた!

$$(x - 18)(x - 44)$$

x元に戻して、

$$\{(x^2 + x) - 18\} \{(x^2 + x) - 44\}$$

$$= \underbrace{(x^2 + x - 18)}_{\substack{\text{かけた } 18 \\ \text{差が } 1}} \underbrace{(x^2 + x - 44)}_{\substack{\text{かけた } 44 \\ \text{差が } 1}}$$

$$18 \begin{cases} 18 \times 1 \\ 9 \times 2 \\ 6 \times 3 \end{cases}$$

$$44 \begin{cases} 44 \times 1 \\ 22 \times 2 \\ 11 \times 4 \end{cases}$$

ともにそんな組み合わせはない!

よって、

$$\text{与式} = \underline{\underline{(x^2 + x - 18)(x^2 + x - 44)}}$$